MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE

COURS 2-16 "MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS"

7 Décembre 2012 — Examen (1)

Livres et ordinateurs interdits — Notes de cours et notes personnelles autorisées

La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent pas vous effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre. Par ailleurs, nous attacherons la plus grande importance à la qualité, à la clarté et à la précision de la rédaction.

I. Exercices sur les relations rationnelles

1 .— On sait qu'en général, il n'est pas vrai que l'image d'un reconnaissable soit reconnaissable. Dans ce qui suit on demande de montrer que ce qui est faux "dans la ces général" peut être vrai dans des cas particuliers.

Soit $h\colon A_1^* \times A_2^* \to B_1^* \times B_2^*$ un morphisme de monoide pour lequel il existe deux morphismes

$$h_1 : A_1^* \to B_1^* \quad \text{et} \quad h_2 : A_2^* \to B_2^*$$

tels que $h(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$.

(i) Vérifier que h est bien un morphisme.

(ii) Donner un exemple de morphisme de $A_1^* \times A_2^*$ dans $B_1^* \times B_2^*$ qui ne soit pas de cette forme.

(iii) Montrer que si $R \subseteq A_1^* \times A_2^*$ est reconnaissable alors $h(R)$ est reconnaissable dans $B_1^* \times B_2^*$. [On pourra par exemple considérer h comme le composé de deux morphismes, chacun laissant une de deux composantes invariante.]

2 .— On considère les deux prédicats suivants sur les entiers non négatifs

$$S(x, y) \equiv x \geq 2y, \quad I(x, y) \equiv y \leq x \leq 2y \ .$$

Montrer qu'il existe des relations rationnelles ternaires non synchrones dont toute projection sur un sous-ensemble strict des trois composantes est synchrone. Suggestion: considérer la relation

$$\{(a^m, a^n, a^p) \mid S(m, n) \text{ et } S(p, n)\} \cup \{(a^m, a^n, a^p) \mid I(m, n) \text{ et } I(p, n)\}$$

et considérer l'alphabet à 4 lettres

$$u = (a, a, a), \quad v = (a, \#, a), \quad w = (a, \#, \#) \quad \text{et} \quad z = (\#, \#, a).$$

II. Problème sur la fonction de croissance des langages rationnels

Dans ce problème, on étudie la fonction $\mathsf{g}_L(n)$ qui à tout n associe le nombre de mots de longueur n dans L:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathsf{g}_L(n) \;=\; \|L \cap A^n\| \;\;.$$

Si $\mathcal{A} = \langle\, I, E, T\,\rangle$ est un automate *booléen* sur A^* (de dimension Q), soit

$$\mathcal{A}^{\#} = \langle\, I, F, T\,\rangle$$

le $\mathbb{N}$-automate sur z^* de même dimension, tel que, pour tous p et q dans Q,

$$F_{p,q} = m_{p,q}\, z \;\;,$$

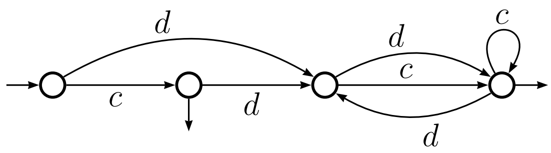
où $m_{p,q}$ est *le nombre* de transitions de p à q dans $\mathcal{A}$ (sachant que chaque transition de $\mathcal{A}$ est étiquetée par une lettre).

1 .— Soit $\mathcal{A}$ un automate *déterministe* sur A qui accepte le langage L de A^*. Montrer que le comportement de $\mathcal{A}^{\#}$ est la série génératrice

$$|\mathcal{A}^{\#}| = \mathsf{G}_L(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{g}_L(n)\; z^n \;\;.$$

L'hypothèse que $\mathcal{A}$ est déterministe est-elle nécessaire?

Soient maintenant $\mathcal{B}$ l'automate de la figure suivante et K le langage qu'il accepte.



2 .— Vérifier que

$$K = (c + d\,c + d\,d)^* \setminus \{c\,c\,(c+d)^* \cup 1_{B^*}\} \;\;.$$

3 .— Donner $\mathcal{B}^{\#}$ et la représentation correspondante pour $|\mathcal{B}^{\#}|$.

4 .— Calculer une représentation réduite pour $|\mathcal{B}^{\#}|$.
(On explicitera bien tous les calculs.)

5 .— Calculer $\mathsf{g}_K(n)$.

On reprend maintenant le cas général. On suppose $\mathcal{A}$ déterministe de dimension Q et $L = L(\mathcal{A})$ fixés et, pour alléger l'écriture, on note $\mathsf{g}(n)$ le nombre de mots de longueur n dans L. Pour tout p dans Q, on note

$$L_p = \{f \in A^* \mid p \xrightarrow[\mathcal{A}]{f} t, t \in T\}$$

et $\mathsf{g}_p(n)$ le nombre de mots de longueur n dans L_p [en particulier, $L = L_i$ et $\mathsf{g}(n) = \mathsf{g}_i(n)$ si i est l'état initial de $\mathcal{A}$].

6 .— Montrer que pour tout $n > 0$ et tous p dans Q, $\mathsf{g}_p(n)$ est une combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs ou nuls des $\mathsf{g}_q(n-1)$, avec q dans Q.

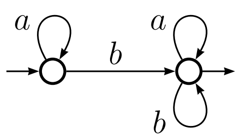
7 .— En déduire que la fonction $\mathsf{g}(n)$ satisfait une relation de récurrence linéaire de la forme:

$$\mathsf{g}(n+k) = z_1\,\mathsf{g}(n+k-1) + z_2\,\mathsf{g}(n+k-2) + \cdots + z_k\,\mathsf{g}(n) \quad ,$$

où k est le nombre d'états de $\mathcal{A}$ et où les z_j sont *des entiers relatifs*.

8 .— Expliquer comment calculer les conditions initiales de la récurrence: $\mathsf{g}(0)$, $\mathsf{g}(1)$,..., $\mathsf{g}(k-1)$.

9 .— Appliquer la méthode et donner la récurrence linéaire dans le cas de l'automate $\mathcal{C}$ ci-dessous.



III. Composantes finie et infinie d'une relation

Si τ est une relation de A^* dans A^*, on définit τ_{f} et τ_∞ les "composantes finie et infinie" respectivement de τ par ($\|f\tau\|$ est le nombre d'éléments de l'image de f par τ):

si $\|f\tau\|$ est fini, alors $f\tau_{\mathsf{f}} = f\tau$ et $f\tau_\infty = \emptyset$, sinon $f\tau_{\mathsf{f}} = \emptyset$ et $f\tau_\infty = f\tau$.

1 .— Montrer que si τ est rationnelle, τ_{f} et τ_∞ sont rationnelles et effectivement calculables à partir de τ.