Sommaire

CHAPITRE I

La machine la plus simple ...

Automates sur un monoïde libre

Au commencement, nous définissons les *automates* comme des *graphes étiquetés*. Ce point de vue permet de présenter simplement les premières propriétés des *langages reconnus* par les automates *finis* — appelés *langages reconnaissables* — comme il conduira naturellement aux généralisations successives qui seront l'objet des chapitres suivants.

Nous considérons ensuite la famille des langages reconnaissables comme le résultat d'une construction directe sur l'*algèbre des langages*, *i.e.* l'ensemble des parties d'un monoïde libre muni de trois opérations, dites « *rationnelles* ». C'est la substance du « théorème de Kleene » et la source d'une part des propriétés de cette famille de langages qui seront désormais appelés aussi « *rationnels* ».

Dans un troisième temps, nous revenons aux automates mais avec un point de vue « fonctionnel » qui correspond plus naturellement à la modélisation d'une « machine qui calcule ». Il amène directement à la notion d'*automate déterministe* et par là à celle d'*automate minimal*.

La quatrième section est une introduction à la théorie des expressions rationnelles, point de vue axiomatique sur la construction des langages rationnels. Cette théorie n'est qu'effleurée mais les définitions sont posées qui permettent de comparer différents modes de calcul les uns par rapport aux autres et d'introduire la notion de *dérivation* d'une expression qui est un autre moyen de relier langages rationnels et automates.

Nous aurons présenté ainsi, particulièrement pour un lecteur qui n'aurait pas déjà étudié le sujet, une théorie « naïve » des automates finis, suffisament riche néanmoins pour inclure, sous leur forme élémentaire, les résultats centraux de la théorie : théorème de Kleene, décidabilité de l'équivalence des automates finis et des expressions, existence, unicité et calculabilité d'un automate minimal, lemmes d'itération sous diverses formes, jusqu'à la version due à Ehrenfeucht, Parikh et Rozenberg qui donne une *condition suffisante* de type *combinatoire* pour qu'un langage soit reconnaissable. L'organisation générale de cette première partie est un va-et-vient entre le coté « des automates » et le coté « des rationnels », commandé par l'exigence de présenter et démontrer aussi simplement, et aussi tôt, que possible les résultats principaux. Mais cela n'empêche pas de donner — en particulier pour les deux directions du théorème de Kleene — plusieurs preuves différentes pour un même résultat : chacune éclaire un aspect particulier de la propriété, correspond à une réalisation algorithmique différente, se prolongera dans des généralisations distinctes.

Dans la première section des compléments, nous revenons sur le problème de la transformation d'une expression rationnelle en automate, problème central dans les utilisations pratiques des automates finis. Dans la seconde, nous abordons le problème de la *hauteur d'étoile* qu'on peut voir comme un raffinement du théorème de Kleene, chapitre ardu, et qui reste encore problématique, de l'étude des langages rationnels. La section suivante nous permet de passer en revue les différents modèles de machine, équivalents aux automates finis, et qui ont été proposés au cours du temps ou dans divers contextes. Par là, nous (re)faisons le lien avec l'intuition d'un dispositif physique constitué d'une mémoire de taille finie et réagissant à la « lecture » d'une succession de symboles. Dans la dernière section, le lecteur trouvera, sous forme de problèmes, quelques propriétés des langages reconnus par automate fini, propriétés qui pour la plupart seront en fait mieux comprises ou expliquées dans les deux chapitres suivants.

PLAN DU CHAPITRE

CHAPITRE II

Puissance de l'algèbre

Automates sur un monoïde quelconque

Nous reprenons la notion d'automate — graphe étiqueté — en supposant que les étiquettes ne sont plus seulement des lettres d'un alphabet, générateur d'un monoïde libre, mais les éléments d'un monoïde, *a priori* quelconque.

Il s'agit de faire la part, dans les résultats et propriétés que nous avons établis au chapitre précédent, de ce qui procède de « la liberté » du monoïde des étiquettes et de ce qui vaut en toute généralité, *i.e.* ce qui tient à la notion d'automate sur un monoïde. On fait apparaître ainsi la distinction entre *partie rationnelle* et *partie reconnaissable*, distinction impossible — sauf au niveau du discours — dans le cas des monoïdes libres.

Comme au chapitre précédent en revanche, les automates sont encore utilisés pour définir des *sous-ensembles* : un élément m d'un monoïde M est accepté, ou n'est pas accepté, par un automate $\mathcal{A}$, *i.e.* appartient, ou n'appartient pas à la partie de M définie par $\mathcal{A}$. Autrement dit, la structure algébrique sous-jacente est $\mathfrak{P}(M)$, le semi-anneau des parties de M, en opposition avec le prochain chapitre où on ne se demandera plus seulement si un élément est accepté ou pas par un automate mais où on *comptera* le nombre de façons dont cet élément peut être accepté.

Les parties rationnelles et reconnaissables d'un monoïde sont définies et étudiées aux sections 1 et 2 respectivement. À la troisième section, nous mettons en place la notion de *morphisme* d'automates qui nous permettra de traiter non plus seulement des parties d'un monoïde mais aussi des automates sur un monoïde avec toute la puissance et la clarté des méthodes algébriques. Nous décrivons à la quatrième section une construction remarquable, due à J. H. Conway, qui associe à chaque partie reconnaissable d'un monoïde un automate qui est en quelque sorte *universellement minimal*. La cinquième section présente une autre stucture algébrique : les *bons quasi-ordres* (généralisation des *bons ordres partiels*), extrêmement utilisée dans tous les aspects de l'informatique théorique et que nous emploierons à plusieurs reprises, dans ce chapitre et dans les suivants. Elle nous permet d'établir un très joli résultat de Ehrenfeucht, Haussler et Rozenberg sur une famille de systèmes de réécriture.

Les bases sont posées. Elles permettront d'utiliser les notions de parties rationnelles et reconnaissables et leurs propriétés dans toute la suite de l'ouvrage, dans une variété de situations et de contextes qui dit assez leur caractère fondamental. L'objectif est double. Le premier est de se donner des outils efficaces pour établir des propriétés des langages rationnels — qui sont aussi reconnaissables. Les sections 2 et 8 en donnent quelques illustrations. À ce sujet, je dois exprimer des regrets, et des excuses au lecteur. Je n'ai pas traité — je l'ai dit dans l'avant-propos — toute la partie de la théorie qui traite de la caractérisation et de *la classification* des langages rationnels par les propriétés de leurs monoïdes syntaxiques — et pourtant, c'est bien un domaine où l'algèbre a montré sa puissance. Cette partie, intitulée « théorie des variétés », est déjà exposée dans plusieurs ouvrages ; j'en donne quelques références dans la section des notes.

Le second objectif est de pouvoir étudier les parties rationnelles dans d'autres structures multiplicatives que le monoïde libre et, par là, d'étendre la puissance des automates finis. Les « compléments » présentent ainsi les parties rationnelles dans le groupe libre — ce qui est, entre autres, une introduction à l'étude mathématique des automates à pile — et les parties rationnelles dans les monoïdes commutatifs libres — qui apparaissent dans de nombreux contextes, en particulier dans ceux liés à la vérification et aux automates dit « temporisés ». L'étude des parties rationnelles dans les produits libres, qui prolonge celle des parties rationnelles dans le groupe libre est repoussée pour des raisons techniques — techniques de preuve — au chapitre suivant.

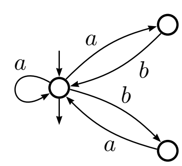
PLAN DU CHAPITRE

CHAPITRE III

Pertinence de l'énumération

Automates avec multiplicité

Une dernière fois, on efface tout — mais on n'oublie rien — et on recommence. Nous avons vu que les automates sont des structures qui acceptent, ou n'acceptent pas, *des mots* (chapitre I) ou, plus généralement, *des éléments d'un monoïde* M quelconque (chapitre II). L'idée de départ de l'approche que nous allons développer dans ce chapitre est d'*être plus précis* et de *compter* les calculs qui font qu'un élément m de M est accepté par un automate. C'est-à-dire qu'un automate va associer à chaque m non plus la valeur « vrai » ou « faux », mais un *nombre*, le nombre de calculs réussis dont m est l'étiquette et fournir ainsi une information plus riche.



Considérons par exemple l'automate $\mathcal{A}_X$ ci-contre. Il n'est pas difficile de se convaincre que non seulement le langage accepté par $\mathcal{A}_X$ est $\{a, ab, ba\}^*$ mais encore que le nombre de calculs de $\mathcal{A}_X$ qui ont pour étiquette un mot f de $\{a, b\}^*$ est très exactement le nombre de façons dont f peut se factoriser en produit de facteurs a, ab et ba.

Mais on ne va pas s'en tenir là. Si on compte les calculs, chaque calcul, chaque transition même, peuvent être affectés d'un *coefficient*. Et, surtout, ce coefficient n'a pas de raison d'être un entier naturel mais peut être pris dans n'importe quel ensemble dans lequel on pourra raisonnablement calculer, *i.e.* n'importe quel semi-anneau $\mathbb{K}$. Le comportement des automates devient ce qu'on appellera des *séries sur* M *à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

On se lance ainsi dans une généralisation qui va bien au-delà de l'idée de départ. D'abord, en choisissant pour ensemble de coefficients un semi-anneau moins fruste que le semi-anneau de Boole, on va se retrouver avec des objets, les séries, dotés d'une structure mathématique plus riche, plus solide, qui autorisera qu'on les étudie avec les méthodes classiques, pas nécessairement complexes, mais puissantes de l'algèbre et de la topologie. Des problèmes fondamentaux, comme l'équivalence ou la minimisation des automates, en seront transformés.

Ensuite, en jouant sur $\mathbb{K}$ et sur M, on va capturer une variété de situations — des plus courts chemins d'un graphe aux systèmes à événements discrets en passant par l'ambiguïté des grammaires ou les relations entre mots — qui semble épuiser le champ du possible. Parfois, une même situation se laissera décrire de plusieurs façons différentes et ses propriétés prendront un nouveau relief sous cet éclairage croisé. Dans tous les cas, le cadre mathématique commun permettra de traiter d'un même mouvement des propriétés qui paraissaient distinctes, révélera des parentés, suggérera des méthodes.

Une telle généralité a un coût : des notations parfois lourdes, des hypothèses qu'il faudra poser pour énoncer et établir certaines propositions qui seraient évidentes dans un contexte plus simple, un degré d'abstraction qui peut faire perdre de vue le caractère effectif, et la contrepartie constructive, de résultats établis à un niveau global par ce qui peut sembler un jeu formel. Les réminiscences des deux chapitres précédents, qui rentrent évidemment dans le cadre général, une certaine redondance dans les énoncés, devraient aider le lecteur à s'y retrouver.

Plus fondamentalement, le sujet recèle une difficulté, qui oblige l'auteur à faire un choix, ou, au moins, à distinguer des situations différentes. On va avoir des automates dont le comportement ne sera plus une partie d'un monoïde, mais une *série*. Pour étendre les résultats vus précédemment, il faudra que l'ensemble des séries — qu'on notera $\mathbb{K}\langle\langle M\rangle\rangle$ — soit un semi-anneau, comme $\mathfrak{P}(M)$, et c'est un premier problème. Pour mettre en relation le comportement des automates et les « opérations rationnelles », il faudra définir une opération « étoile » : deuxième problème. Comment, sous quelles hypothèses, justifier une écriture telle que (si s est une série) :

$$s^* = \sum_{n\in\mathbb{N}} s^n\,, \qquad \text{contrepartie naturelle de} \qquad P^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^n\ ,$$

(où P est une partie d'un monoïde) ? comment s'assurer des propriétés d'une telle opération ? Il nous suffira, dans cette introduction, d'évoquer les manières de résoudre ce dernier.

Pour traiter des sommes infinies, les mathématiques apportent classiquement une réponse : mettre une *topologie* sur l'ensemble considéré et utiliser les notions de limite et de continuité. Dans la situation qui nous occupe, la difficulté est qu'il n'y a pas de solution, *i.e.* de façon de définir une topologie, qui vaudrait *pour tous les choix possibles* du semi-anneau des coefficients $\mathbb{K}$ et du monoïde de base M.

Il y a, au moins, deux options. Dans l'une[1], on se restreint aux cas où M est un monoïde libre A^*. Il est alors aisé et classique de définir, à partir de la fonction « longueur des mots », une topologie sur $\mathbb{K}\langle\langle A^*\rangle\rangle$, quel que soit $\mathbb{K}$, et en considérant que ses éléments sont tous « détachés » les uns des autres (topologie discrète sur $\mathbb{K}$). Dans l'autre au contraire, M est quelconque et la topologie sur $\mathbb{K}\langle\langle M\rangle\rangle$ se déduit de propriétés de $\mathbb{K}$ qui doit être choisi en conséquence.

Nous allons prendre une position[2] qui, si elle donne des énoncés plus généraux, reste fondamentalement semblable à la première : nous ferons porter la restriction sur M et imposerons qu'on puisse définir sur ses éléments l'équivalent d'une fonction longueur, mais sans que M soit nécessairement un monoïde libre. On pourra tout

[1] C'est le choix de Berstel et Reutenauer dans leur monographie : *Les séries rationnelles et leurs langages*, Masson, 1984 ([30]).

[2] C'est, dans une large mesure, celle d'Eilenberg, *op. cit.*, ou celle de Salomaa et Soittola [205].

aussi bien définir une topologie sur $\mathbb{K}\langle\langle M\rangle\rangle$, pour tout semi-anneau $\mathbb{K}$, muni lui-même d'une topologie non nécessairement discrète. Le gain en généralité sera utilisé, entre autres, dans l'étude des relations et fonctions de mots réalisées par automate fini, aux deux chapires suivants. La description de ce type de monoïdes, qu'on appellera *gradués*, puis de la topologie sur $\mathbb{K}\langle\langle M\rangle\rangle$ occupe la première section. Nous présentons alors dans ce cadre les résultats sur les automates avec multiplicité, dans les deux sections suivantes, qui correspondent aux deux premières sections[3] du chapitre II.

À la section 4, nous particularisons l'option précédente au cas où M est un monoïde libre. Cela n'apporte rien sur $\mathbb{K}$, qui peut déjà être quelconque dans les quatre premières sections, mais cela permet d'une part un traitement différent des résultats déjà démontrés et d'autre part d'établir d'autres résultats, spécifiques aux séries sur le monoïde libre. Nous développerons deux points plus particulièrement. D'abord, nous reviendrons sur la *dérivation des expressions*, vue au premier chapitre. C'est un bon exemple où l'introduction des multiplicités se révèle éclairante et efficace. Ensuite, si $\mathbb{K}$ est un corps (non nécessairement commutatif), nous décrirons la théorie, complètement algébrique et due à Schützenberger, de la *minimisation des automates* via leur représentation matricielle.

En complément, nous commençons par reprendre les hypothèses de choix de $\mathbb{K}$ et M et décrivons une classe de semi-anneaux $\mathbb{K}$ tels que $\mathbb{K}\langle\langle M\rangle\rangle$ peut être défini sans restriction sur M, pour pouvoir au moins replacer dans le cadre des séries les résultats décrits au chapitre précédent sur les *parties* d'un monoïde quelconque. Cette section est très peu développée et sert de jalon en vue de développements ultérieurs[4]. Nous revenons ensuite, à la section 6, sur l'étude des parties rationnelles d'une famille de monoïdes — disparues, les multiplicités ! — mais avec les techniques matricielles abondamment utilisées dans ce chapitre. Nous terminons par un petit mémento d'algèbre linéaire non commutative dont l'objectif est la définition du rang d'une matrice, même dans le cas où les coefficients sont pris dans un corps non commutatif.

[3]En fait aux *trois* premières, car l'étude des   -revêtements est intégrée à la section 2.

[4]En particulier sur les automates à pile en relation avec les séries sur le groupe libre et qui n'apparaîtront pas dans ce volume.

PLAN DU CHAPITRE

CHAPITRE IV

Richesse des transducteurs

Relations réalisées par automate fini

Nous entreprenons dans ce chapitre l'étude des *relations réalisées par des automates finis.* Elle se poursuivra au chapitre suivant par celle du cas particulier, particulièrement fécond, des *relations fonctionnelles*, ou fonctions, elles aussi réalisées par des automates finis. Dans ce but, nous allons être amenés à mettre en œuvre quelques-unes des notions et résultats, élaborés aux deux chapitres précédents, sur les automates sur les produits directs de monoïdes libres (qui ne sont pas des monoïdes libres) et sur les automates sur les monoïdes libres mais avec multiplicité dans des semi-anneaux de coefficients adéquats.

Ce chapitre reproduit aussi, en raccourci, la structure des trois chapitres qui le précèdent. Dans une première section, nous commençons par reprendre un point de vue « ensembliste » sur le monoïde libre : les automates font correspondre des mots aux mots. On bâtit ainsi une théorie dont l'origine remonte au tout début de la théorie des automates, et déjà exposée avec une plus ou moins grande généralité dans plusieurs ouvrages[1]. Son objet principal a été la classification de familles de langages non rationnels, principalement de sous-familles de langages algébriques, par le biais de relations entre mots ainsi définies. Cet aspect ne sera pas abordé ici et nous nous tiendrons à l'étude des propriétés de ces relations pour elles-mêmes.

Dans les deuxième et troisième sections, nous reprenons cette étude dans le cadre général des automates avec multiplicité et des séries. Nous envisageons d'abord les problèmes inhérents à la définition même des applications (additives) qui à une série font correspondre une série, puis étudions celles qui sont réalisées par des automates finis. Sous cette forme, le sujet est moins classique[1].

Ce mode d'exposition en deux temps entraîne des redites, j'en suis conscient, et marri. Mais c'est, je crois, le prix à payer — en tout cas, je n'ai pas su le faire à moindre frais — pour que d'une part les calculs simples soient expliqués de façon élémentaire et que d'autre part la nature profonde de ces mêmes calculs soit présentée dans le cadre général qui est réellement le leur et dans lequel ils prennent toute leur signification.

L'étude des relations réalisées par automate fini — que ce soit avec ou sans multiplicité — est organisée pour une bonne part autour de deux résultats principaux : théorème d'évaluation et théorème de composition, que nous appellerons « théorèmes pivots ». Dans le cas des relations *avec* multiplicité, leur importance est

[1] *Cf.* les notes bibliographiques.

encore plus grande car ce sont eux qui guident nos choix quand nous devons faire des hypothèses sur le semi-anneau des coefficients.

Le problème de l'équivalence des transducteurs occupe la quatrième section et met en lumière la différence fondamentale induite par le fait de considérer, ou de ne pas considérer, *la multiplicité* avec laquelle les couples de mots sont mis en relation par les automates. L'équivalence *sans* multiplicité se ramène plus ou moins facilement au problème de correspondance de Post et se révèle de ce fait indécidable ; le cas délicat est celui des relations à valeur dans un monoïde libre à un seul générateur et est dû, indépendamment à O. Ibara et à L. Lisovik. L'équivalence *avec* multiplicité en revanche est décidable. La preuve de cette décidabilité est sans doute le plus bel exemple de la nature algébrique des « objets automates » que nous étudions. Elle repose en effet, comme l'ont montré T. Harju et J. Karhumäki, sur deux résultats d'algèbre, classiques mais non élémentaires, dont nous nous attachons à donner une démonstration complète dans la section « Séries de Malcev-Neumann » des compléments.

Au titre des compléments également, deux familles de relations retiendront ensuite notre attention pour la variété des situations où elles apparaissent : les relations *déterministes* et, surtout, les relations *synchronisées*. Les définitions de ces familles renvoient toutes les deux au modèle d'automates à k bandes de Rabin & Scott que nous avons vu dès la section 1. De fait, ces deux familles sont étudiées avec le même point de vue ensembliste que celui de la section 1 et peuvent être abordées sans références aux sections 2 à 4.

Un groupe de résultats concernant les relations rationnelles, à savoir ceux qui entourent le théorème[2] dit « d'uniformisation rationnelle » est reporté au chapitre suivant où il trouve une place logique à coté du théorème de décomposition des relations fonctionnelles.

PLAN DU CHAPITRE

---

[2] Ou celui qu'Eilenberg, *op. cit.*, appelle « Cross-section Theorem ».

chapitre V

Simplicité des transducteurs fonctionnels

Fonctions réalisées par automate fini

Suite annoncée du précédent, ce chapitre traite des relations fonctionnelles, ou *fonctions*, qui peuvent être réalisées par des automates finis, et que, par habitude et commodité, et en dépit des quiproquos créés avec d'autres chapitres des mathématiques, nous appellerons dans toute la suite *fonctions rationnelles*. L'hypothèse de fonctionnalité, en croisant celle de rationalité, va apporter des résultats de structure remarquables.

Nous commençons par établir que le fait d'être fonctionnelle est une *propriété décidable* pour une relation rationnelle. Puis nous définissons des familles de fonctions qui vont être utilisées dans la suite, à savoir les fonctions *séquentielles* (et *co-séquentielles*) qui sont réalisées par des transducteurs qui, grossièrement, sont aux transducteurs fonctionnels quelconques ce que les automates déterministes (et co-déterministes) sont aux automates quelconques.

La deuxième section traite de l'*uniformisation des relations rationnelles par des fonctions rationnelles*. Nous déduirons ce résultat de la construction du *revêtement de Schützenberger* d'un automate et cette méthode de preuve nous permettra de le mettre à la source de tous les développements qui vont suivre. En particulier, nous en déduirons simplement que toute fonction rationnelle admet une *représentation matricielle semi-monomiale*, ce qui donnera le résultat de structure principal, à savoir que toute fonction rationnelle est le produit d'une fonction séquentielle par une fonction co-séquentielle et c'est cela qui nous permet de dire que les fonctions rationnelles « sont simples ».

Ces résultats se prolongent à la section suivante. D'abord avec la notion de transversale qui est duale de celle d'uniformisation, renversement de point de vue qui se révèle fécond. Ensuite avec une étude plus fine, et plus technique, sur la façon dont les uniformisations, et les transversales, peuvent être construites.

La quatrième section est consacrée à l'étude des fonctions séquentielles. Nous montrons d'abord que le fait d'être séquentielle est une propriété décidable pour une fonction rationnelle, par un procédé qui étend directement celui que nous avions utilisé pour décider si un transducteur est fonctionnel. Nous développons ensuite le parallèle qui peut être fait entre les fonctions séquentielles et les langages rationnels (ou reconnaissables).

Les fonctions séquentielles sont susceptibles de deux caractérisations. La première part de la définition des *translatées d'une fonction* qui est l'exact analogue des *quotients d'un langage*. Une fonction est (rationnelle) séquentielle si, et seulement si, l'ensemble de ses translatées est fini et cet ensemble permet de construire canoniquement un *transducteur minimal* pour la fonction comme l'ensemble des quotients permet de définir l'automate minimal d'un langage.

La seconde caractérisation est de nature topologique et est fondée sur la définition de ce que nous appelons les fonctions *uniformément bornées*. Cette propriété caractérise les fonctions (rationnelles) séquentielles dans la famille des fonctions rationnelles (petit théorème de séquentialité), et même dans la famille des fonctions dont l'inverse préserve la rationalité (grand théorème de séquentialité).

PLAN DU CHAPITRE

TABLE DES MATIÈRES

La rationalité dans les relations